Merkhilfe Mathematik am Gymnasium

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

1 Inhalte der Mittelstufe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Potenzen

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ $\qquad (a^r)^s = a^{rs}$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\qquad a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $\qquad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Logarithmen

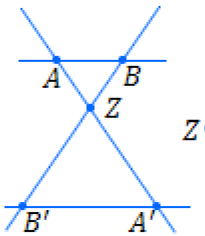
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ $\qquad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\qquad \log_a b^r = r \cdot \log_a b$

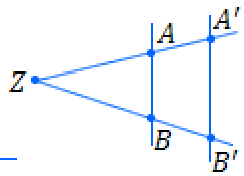
Strahlensätze

Ist $AB \parallel A'B'$, so gilt:

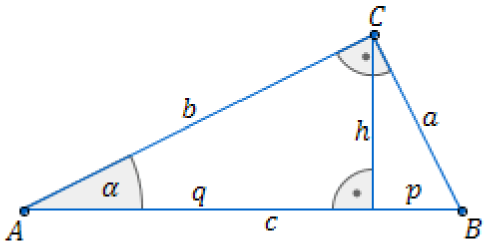
$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$, $\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$





Rechtwinkliges Dreieck



Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = p\,q$

Kathetensatz: $a^2 = c\,p\,;\;\; b^2 = c\,q$

$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$

Allgemeines Dreieck

Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,;\;\; b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,;\;\; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Sinus und Kosinus

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi$ $\qquad (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi$ $\qquad \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$

Figurengeometrie

Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

Kreis: $U = 2r\,\pi\,;\quad A = r^2\pi$

Raumgeometrie

Prisma: $V = G\,h$ $\qquad$ gerader Kreiszylinder: $V = r^2\pi\,h;\quad M = 2r\,\pi\,h$

Pyramide: $V = \frac{1}{3} G\,h$ $\qquad$ gerader Kreiskegel: $V = \frac{1}{3} r^2\pi\,h;\quad M = r\,\pi\,m$

Kugel: $V = \frac{4}{3} r^3\pi;\quad O = 4\,r^2\pi$

2 Analysis

Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} (x^r \cdot \ln x) = 0 \quad (\text{jeweils } r > 0)$$

Ableitung

- Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate): $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (falls der Grenzwert existiert und endlich ist)
- Schreibweisen: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y'$

Ableitungen der Grundfunktionen

$(x^r)' = r \cdot x^{r-1} \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Ableitungsregeln

Summenregel:	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel:	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel:	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Anwendungen der Differentialrechnung

- Tangentensteigung: $m_T = f'(x_0)$
- Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$
- Monotonie

  $f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f fällt streng monoton in I.
  $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f steigt streng monoton in I.
- Extrempunkte

  Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Extrempunkt.
- Krümmung

  $f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I rechtsgekrümmt.
  $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I linksgekrümmt.
- Wendepunkte

  Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Newton'sche Iterationsforme:l $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f.

$$I(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad I'(x) = f(x)$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$ (F ist eine Stammfunktion von f)

Unbestimmte Integrale

$$\int x^r\,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{dx} = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{dx} = \sin x + C$$

$$\int e^x\,\mathrm{dx} = e^x + C$$

$$\int \ln x\ \mathrm{dx} = -x + x \cdot \ln x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\mathrm{dx} = e^{f(x)} + C$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$ (F ist eine Stammfunktion von f)

3 Stochastik

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Urnenmodell

- Ziehen ohne Zurücklegen
  Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen K schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
  $$P(\text{"genau } k \text{ schwarze Kugeln"}) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
- Ziehen mit Zurücklegen
  Aus einer Urne, in der der Anteil schwarzer Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
  $$P(\text{"genau } k \text{ schwarze Kugeln"}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Unabhängigkeit zweier Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zufallsgrößen – Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- Erwartungswert:
  $$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$
- Varianz:
  $$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n;p)$, so gilt:

- $P(X=k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Signifikanztest

- Fehler 1. Art: H_0 wird irrtümlich abgelehnt
- Fehler 2. Art: H_0 wird irrtümlich nicht abgelehnt

Als Signifikanzniveau bezeichnet man den Wert, den die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

4 Geometrie

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Definition: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (0 \le \varphi \le \pi)$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Definition: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
- Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- Betrag: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi)$
- Flächeninhalt eines Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$
- Volumen einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|$

Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$

Schwerpunkt eines Dreiecks ABC

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

- Parameterform: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$
- Normalenform in Vektordarstellung: $\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$
- Normalenform in Koordinatendarstellung:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$$

Kugelgleichung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$